بسمه‌تعالي

جزوه:

اصول خطاگیری و روش کار در آزمایشگاه

مخصوص دانشجویان آزمایشگاه فیزیک پایه ۱

گروه فیزیک دانشگاه اصفهان

۱۳۸۵

فهرست

امام علي (ع):

علم بدون عمل،وبال و عمل بدون علم گمراهی است.

پیش گفتار

در گردآوری این نوشتار بسیار تلاش شده تا ضروری‌ترین و کاربردی‌ترین مطالب به‌گونه‌ای فراهم گردد تا دانشجویان بیش‌ترین استفاده را ببرند و در صورت لزوم نیز برای روشن شدن مطلب از مثال‌های واقعی بهره گرفته شده است. امید است این مطالب بتواند در انجام درست آزمایش‌ها و نیز تنظیم درست گزارش کار کمک شایانی به دانشجویان بنماید. از کلیه‌ی خوانندگان محترم این نوشتار خواهشمند است نظرات مفید خود را برای اصلاح آن در اختیار کارشناسان محترم آزمایشگاه‌های پایه و عمومی فیزیک قرار دهند تا در ویرایش‌های بعدی آن مورد استفاده قرار گیرد.

سرپرست آزمایشگاه‌های پایه و عمومی فیزیک

هدف و چگونگی کار در آزمایشگاه

مهم‌ترین هدف از کار در آزمایشگاه، تحقیق تجربی قوانین نظری است کـه دانشـجو در کـلاس درس با آن‌ها آشنا می‌گردد تا درک همه‌جانبه‌تری از مفاهیم نظری به دست آورد. بدین منظور کسب مهارت در روش‌های تجربی ضروری است و لذا در آزمایشگاه‌های علوم پایه که دانشجو برای نخسـتین بار با کار آزمایشگاهی روبـرو مـی‌شـود، بـیش‌تـر تکیـه بـر آمـوزش روش صـحیح و دقیـق تجربـی و نتیجه‌گیری منطقی از نتایج آزمایش بر اساس قوانین نظری است تا تحقیق یـک قـانون بخصـوص. از این رو، دانشجو برای بهره بردن از آزمایشگاه نه تنها بایـد دقیـق و جـدی باشـد بلکـه بایسـتی بـرای برقراری نظم و مقررات کمک نماید.

بر خلاف کلاس‌های نظری که در آن مدرس کلاس را اداره می‌نماید، در آزمایشگاه این دانشـجو است که بایستی با تلاش جدی در برگزاری آزمایشـگاه همکـاری مـؤثر داشـته باشـد. فعالیـت‌هـا در آزمایشگاه در گروه‌هایی بسیار کوچک‌تر از کلاس درس صورت می‌گیرد و به این ترتیب گروه مسـتقل آزمایش کننده، مسئول کلیه ی فعالیت‌های خود است. لـذا دانشـجویان بایسـتی سـعی کننـد کـه در کلیه‌ی کارهای مربوط به گروه کوچک خود شرکت نموده تا بازده کار خـود و گـروه خـود را هـر چـه بیش‌تر افزایش دهند.

چگونگی کار در آزمایشگاه و تهیه‌ی گزارش کار، از عوامل تعیین کننده در ارزیابی هـر دانشـجو می‌باشد. میزان همکاری بین افراد هر گروه و محتوای گزارش کار در ارزیابی گروه نقش مؤثر دارد.

روش کار در آزمایشگاه:

برای موفقیت در هر کاری رعایت نکاتی لازم است. در آزمایشگاه نیز بـرای اسـتفاده‌ی بهینـه از وقت رعایت نکات زیر ضروری است:

۱ـ قبل از این که کار در آزمایشگاه شروع شود باید خود را از هر نظر برای چند سـاعت کـار پیوسـته آماده کرد.

۲ـ حضور در آزمایشگاه از اول وقت ضروری است. از آن جا که ارائه‌ی دوباره‌ی جلسات آزمایشـگاه بـا مشکلات زیادی روبروست، چنان چه به دلیل موجه یـا غیرموجـه در جلسـه‌ای نتوانسـتید حاضـر شوید از انجام آزمایش مربوطه محروم خواهیـد شـد و نمـره‌ی گـزارش کـار آن جلسـه محسـوب نخواهد شد. اگر تعداد جلسات غیبت شما از دو جلسه بیش‌تر شود، مجـاز بـه شـرکت در امتحـان نخواهید بود. لذا از غیبت در آزمایشگاه باید تا حد امکان خودداری کرد.

۳ـ از جلسه‌ی نخست، نام مـدرس، کارشـناس آزمایشـگاه، شـماره‌ی گـروه و اسـم همکـاران خـود را به خاطر بسپارید.

۴ـ همیشه باید دفترکار خود را همراه داشته باشید و همه‌ی اطلاعات مفید را مطابق دستورهای داده شده به هنگام انجام کار یادداشت کنید.

۵ـ پیش از آمدن به جلسه، دستور کار مربوط به آن جلسه را مطالعه کرده و کارهای لازم را بین افراد گروه تقسیم کنید. اگر سؤالی در این مورد باشد، از مدرس، کارشناس آزمایشگاه و یا همکاران مطلع بپرسید تا هنگام انجام آزمایش نتیجه‌ای مطلوب به دست آورید و پیشرفت کار سریع‌تر صورت گیرد.

۶ـ قبل از شروع به کار باید میز آزمایش را بررسی کرد تا همه‌ی وسایل مورد نیاز روی میز قرار داشته باشد. هم چنین باید مطمئن شد که وسایل سالم و برای کار آماده می‌باشند. اگر طرز کار با وسیله‌ای را نمی‌دانید هر چه زودتر باید از مدرس مربوطه یا کارشناس آزمایشگاه بپرسید و قبل از این کار از دست زدن و بازی کردن با آن خودداری کنید و از انجام آزمایش با عجله بپرهیزید.

۷ـ رعایت مقررات ایمنی به هنگام انجام آزمایش‌ها الزامی بوده و باید مواظب بود که به خود و دستگاه‌ها صدمه‌ای وارد نشود.

۸ـ در تمام طول مدت کار در آزمایشگاه سعی کنید که از سر میز کار خود دور نشده و از رفت و آمدهای غیرضروری بین میزها خودداری کنید. برای پرسیدن سؤال، بهتر است دانشجو سر میز، منتظر مدرس باقی بماند.

۹ـ تمامی اعضای گروه، مسئول وسایل روی میز خود هستند و در پایان کار باید صحیح و سالم آن‌ها را تحویل کارشناس آزمایشگاه دهند. هر کم و کاستی و ایرادی که در وسایل پیدا شود و دانشجویان آن را اطلاع ندهند، مسئول آن خواهند بود.

۱۰ـ در حین آزمایش‌ها بهتر است که دانشجویان، نخست سعی کنند جواب سؤال‌های پیش آمده را با هم‌فکری یکدیگر بیابند و در غیر این صورت از مدرس آزمایشگاه بپرسند. ولی این روش که دانشجو تا با سؤال و مشکلی مواجه گردید فوری بخواهد آن را از دیگران بپرسد آموزنده نیست.

۱۱ـ در حین انجام آزمایش‌ها بهتر است دانشجویان با انجام محاسبات تقریبی از صحت کار خود اطمینان حاصل کنند، ولی نتایج دقیق را باید پس از انجام کامل آزمایش محاسبه نمود.

۱۲ـ در حین اندازه‌گیری‌ها و آزمایش‌ها از همان اول باید مراقب منابع خطای اندازه‌گیری بوده و سعی شود تا حد امکان از میزان خطاها کاست.

۱۳ـ در مواردی که احتمال وجود خطا زیاد است باید آزمایش را به دفعات لازم تکرار کرده و میانگین اندازه‌گیری‌ها را به دست آورد (برای حذف خطای تصادفی).

۱۴ـ در ثبت نتایج اندازه‌گیری‌ها باید مراقب بود که تمام ارقامی که وسیله‌ی اندازه‌گیری نشان داده است درست خوانده شود و از وارد کردن ارقام بی‌معنی خودداری کرد.

۱۵ـ پس از انجام آزمایش‌ها باید وسایل آزمایش را روی میزها بـه حالـت اولیـه برگردانـد و میزهـا را مرتب و تمیز ترک کرد.

۱۶ـ دانشجویان پیش از خروج از آزمایشگاه باید نتایج آزمایش‌های خود را به مـدرس مربوطـه نشـان دهند تا پس از بررسی اگر کم و کسری داشته باشد، همان جا جبران شود.

۱۷ـ مهلت تحویل گزارش کار حداکثر یک هفتـه پـس از انجـام آزمـایش بـوده و در صـورت تـأخیر، نمره‌ی گزارش کم خواهد شد.

تنظیم گزارش کار:

گزارش کار می‌بایست به ترتیب زیر تهیه شود. همچنین نمودارها باید در کاغذ ملی‌متری رسـم شوند:

الف) در صفحه‌ی اول گزارش کار باید موارد زیر تکمیل شود:

نام آزمایش:

تاریخ انجام آزمایش:

نام مدرس:

نام دانشجوی نویسنده: شماره‌ی دانشجویی:

روز و ساعت کلاس: گروه آزمایشگاهی:

نام همکاران:

ب) هدف آزمایش.

ج) وسایل مورد نیاز.

د) مقدمه و تئوری آزمایش که شامل شرح قوانین و فرمول‌های به کار برده شده می‌باشد.

هـ) شرح کوتاهی از روش محاسبه.

و) شرح محاسبات و درج اعداد به دست آمده در جداول.

ز) رسم نمودارهای خواسته شده (الزاماً در کاغذ میلی‌متری).

ح) محاسبه‌ی خطا و نتیجه‌گیری از آزمایش به کمک اعداد اندازه‌گیری شده.

ط) مقایسه‌ی نتایج آزمایش با تئوری و توجیه اختلاف آن‌ها.

ی) پاسخ به سؤالات پایان آزمایش که در دستور کار آمده است.

پاکیزگی و دقت شما در نوشتن گزارش کار سهم مهمی در بالا بردن ارزش کار شما دارد. سـعی کنید تمام قسمت‌های گزارش کار را از انشای خودتان تهیه نمائید زیرا کپی‌برداری از دسـتور کـار بـه مقدار زیادی از ارزش کار شما خواهد کاست.

موضوع فیزیک عملی:

از آن جا که در ابتدای هر کار عملی باید هدف از کار مشخص شود، از ایـن رو در دروس عملـی آزمایشگاه فیزیک می‌توان چند هدف کلی را نام برد:

الف) نمایش عملی مفاهیم نظری در فیزیک.

ب) آشنایی با دستگاه‌ها.

ج) آموزش چگونگی انجام آزمایش‌ها.

مشاهده‌ی نمایش عملی یک پدیده، کمک بزرگی به درک آن مـی‌کنـد ولـی روابـط هندسـی و ریاضی آن را به تفصیل بررسی نمی‌کند. بنابراین، هدف اول، یعنـی نمـایش مفـاهیم نظـری فایـده‌ای معین ولی محدود دارد. شاید هدف دوم اهمیت بیش‌تری داشته باشد. در هر آزمایشی تعدادی وسـیله به کار می‌برید و تجربه‌ای که از کارکرد آن‌ها به دست می‌آورید، مسلما مفید است، ولی اگر بـه نـوعی کار پژوهشی مشغول باشید، تعداد دستگاه‌هایی که با آنها برخورد می‌کنید بی‌شمار اسـت کـه ممکـن است هیچ درس عملی نتواند کاربرد همه‌ی آن‌ها را به شما بیاموزد. آن چه در این درس فرا می‌گیرید آموزش کاربردی وسایل در حالت کلی است. اهداف عمده‌ی آزمایشگاه این است که به شما بیاموزد:

الف) آزمایشی طرح کنید که دقت آن با هدف آزمایش متناسب باشد.

ب) از خطاهای منظم در روش‌ها و وسایل آزمایش آگاهی یابید و آن‌ها را حذف کنید.

ج) نتایج آزمایش را تحلیل کنید و نتایج صحیح را از میان آن‌ها استخراج کنید.

د) دقت نتیجه‌ی نهایی را برآورد کنید.

هـ) اندازه‌گیری‌ها و محاسبات را به طور دقیق، واضح و مختصر ثبت کنید.

همان طور که می‌دانیم فیزیک یکی از علوم طبیعی است کـه در شـناخت طبیعـت مـا را یـاری می‌کند. در فیزیک وقتی می‌خواهیم یکی از پدیده‌های طبیعـت را تحلیـل کنـیم غالبـا از جنبـه‌هـای اساسی آن پدیده شروع می‌کنیم و پس از این که به نتیجه‌ای رسیدیم جنبه‌های دیگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم تا نهایتاً به هدف ثابت و مشخص برسیم.

در فیزیک آن چه را به نظر ما خصوصیت اساسی یک وضع فیزیکی است انتخاب می‌کنـیم و بـا تعمیم این خصوصیت به نظریه می‌رسیم و از این نظریه نتایجی به دست می‌آوریم.

با انجام آزمایش، نتیجه را می‌آزمائیم. اما این نتیجه از یک وضـعیت آرمـانی یـا سـاده‌ی نظـری حاصل می‌شود. برای آزمودن آن مجبوریم این وضعیت ساده را در میان پدیده‌های در هـم و پیچیـده به وجود آوریم که غالباً کار مشکلی است.

بنابراین در درس آزمایشگاه شما با موانع موجود بر سر راه آزمون نظریـه آشـنا مـی‌شـوید. یـاد می‌گیرید که چگونه یک کمیت مشخص (نه کمیت دیگری) را اندازه بگیرید و چگونه بر موانع موجـود

غلبه کنید. اما مهم‌تر از همه، بینش کلی از فیزیک و رابطه‌ی میان تجربه و نظریه که جوهر اصلی موضوع است، به دست می‌آورید.

اندازه‌گیری

هر کمیت فیزیکی باید بر اساس یک تعریف روشن علمی بیان گردد به طوری که قابل اندازه‌گیری باشد و دستورالعمل مشخص برای اندازه‌گیری آن ارائه شده باشد. هم چنین یکا یا واحدی به آن نسبت داده باشیم. عمل اندازه‌گیری یک کمیت در واقع یک عمل مقایسه است بین آن کمیت و کمیتی از آن نوع که به عنوان معیار انتخاب شده است. انتخاب معیار کاملاً اختیاری است ولی برای هماهنگی و تسهیل در مبادله‌ی دانش، معیارها باید استاندارد باشند. انتخاب استاندارد معیار توسط شورای دانشمندان فیزیک در سطح بین‌المللی به طور قراردادی تعیین می‌شود. این معیارها فقط برای کمیت‌های اصلی که در سیستم آحاد مختلف فرق می‌کند، انتخاب می‌شوند مثلاً دو نوع سیستم آحاد SI و CGS را می‌توان نام برد که معمولاً از سیستم SI که کمیت‌های اصلی در آن مانند جدول ۱ تعریف می‌شوند، استفاده می‌شود.

علامت اختصاری	واحد	نوع کمیت
m	متر	طول
kg	کیلوگرم	جرم
s	ثانیه	زمان
k	کلوین	دما
A	آمپر	جریان الکتریکی
mol	مول	مقدار ماده
cd	شمع	شدت روشنایی

جدول۱ـ واحد کمیت‌های اصلی در سیستم SI

واحد هر کدام از این کمیت‌های اصلی با روش‌های اندازه‌گیری بسیار دقیق تعریف شده است. پس هر عددی که نوشته می‌شود، تا واحد آن مشخص نشود از نظر فیزیکی مفهومی ندارد.

اندازه‌گیری‌ها به دو روش مستقیم و غیرمستقیم انجام می‌گیرد. در اندازه‌گیری مستقیم، دستگاه اندازه‌گیری مستقیماً مقدار کمیت را نشان می‌دهد. مثل اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل با ولت‌متر. بیش‌تر اوقات لازم می‌شود که اندازه‌گیری به روش غیرمستقیم انجام گیرد. یعنی این که

مقدار کمیت را از طریق اندازه‌گیری مستقیم کمیت‌های دیگر و با استفاده از یک قانون یا رابطه‌ی فیزیکی و محاسبه به دست آورد. روش غیرمستقیم به چند علت عمده‌ی زیر لازم می‌شود:

۱ـ در دسترس نبودن جسم، مانند اندازه‌گیری ابعاد خورشید و ماه و زمین و یا فاصله‌ی ستارگان و یا ابعاد اتم‌ها و مولکول‌ها.

۲ـ ماهیت ممکن است طوری باشد که وسیله‌ای نتوان ساخت که مستقیماً آن را اندازه بگیرد و یا لزومی برای ساختن آن نباشد. مانند اندازه‌گیری شتاب حرکت، بار الکتریکی الکترون، ثابت جاذبه g، ثابت پلانک h و غیره.

۳ـ تحقیق صحت یک قانون. اغلب برای پی بردن به صحت یک قانون، کمیتی را که قانون مزبور، رابطه‌ی آن را با دیگر کمیت‌ها بیان می‌کند یک بار مستقیماً اندازه می‌گیرند و بار دیگر مقدار آن را از روی اندازه‌گیری مستقیم کمیت‌های دیگر به کمک قانون آن محاسبه می‌کنند و این دو نتیجه را با هم مقایسه می‌نمایند.

نوع وسیله‌ای که برای اندازه‌گیری خاص انتخاب می‌شود، بستگی دارد به اندازه‌ی آن کمیت و دقتی که برای اندازه‌گیری آن لازم است. بدیهی است هر قدر اندازه‌ها کوچک‌تر باشند، دقت بیش‌تری لازم خواهد بود. مثلاً برای اندازه‌گیری طول‌های بزرگ‌تر، از یک متر نواری و برای اندازه‌گیری طول‌های بین چند سانتی‌متر تا یک متر، از خط‌کش و برای اندازه‌گیری طول‌های کوچک‌تر، از کولیس و یا ریزسنج استفاده می‌شود.

ارقام بامعنی:

در ثبت نتایج آزمایشگاهی باید به نوشتن اعداد توجه کرد زیرا تمام ارقام یک عدد باید معنی‌دار باشد. به این مفهوم که عدد نوشته شده نباید دقتش بیش‌تر و یا کم‌تر از دقت دستگاهی باشد که اندازه‌گیری با آن انجام شده است. یکی دیگر از تفاوت‌های اعدادی که معرف مقدار یک کمیت فیزیکی است با اعداد ریاضی، علاوه بر دارا بودن واحد، معنی‌دار بودن ارقام آن لازم است. مثلاً از نظر ریاضی تفاوتی بین ۲/۰۰۰ با عدد ۲ نیست ولی از نظر فیزیکی این دو عدد متفاوت‌اند چون تعداد اعداد بامعنی آن‌ها فرق می‌کند و نشان می‌دهد که عدد اول معرف کمیتی است که با دقت بیش‌تری اندازه‌گیری شده است.

تمام ارقامی که وسایل اندازه‌گیری در حین اندازه‌گیری نشان می‌دهند، بامعنی (و یا مهم) هستند. مثلاً اگر طولی را با خط‌کش میلی‌متری اندازه بگیریم و عدد ۳/۱۵ سانتی‌متر را به دست بیاوریم، هر سه رقم این اعداد مهم هستند (گو این که نشانه‌ای روی خط‌کش برای نشان دادن رقم سوم این عدد نیست ولی می‌توان نظراً یک میلی‌متر را به ده قسمت تقسیم کرد و جزء میلی‌متر را تشخیص داد). معمولاً آخرین رقم بامعنی عدد حاصل از اندازه‌گیری را رقم مشکوک (مجهول) گویند.

در مثال بالا، رقم آخر که ۵ می‌باشد، رقم مشکوک است بدین معنی که نتیجه‌ی اندازه‌گیری عددی است بین ۳/۱۴ و ۳/۱۶ سانتی‌متر، و بیش‌تر احتمال می‌رود که ۳/۱۵ سانتی‌متر باشد.

کوچک‌ترین درجه‌ای که از روی وسیله‌ی اندازه‌گیری می‌توان خواند، دقت آن وسیله خوانده می‌شود. دقت وسایل اندازه‌گیری تعداد ارقام بامعنی را مشخص می‌کند. در محاسبات عددی بایستی از نوشتن ارقامی که از حدود دقت اندازه‌گیری مستقیم یا غیرمستقیم دور می‌باشند، خودداری نمود. مثلاً در مثال بالا نمی‌توان بعد از رقم سوم رقم دیگری اضافه کرد؛ و اگر نوشته شود رقم بی‌معنی خواهد بود. همین طور بدون دلیل نمی‌توان تعدادی از ارقام بامعنی را کنار گذاشت. بدین قرار نمی‌توان نتیجه‌ی اندازه‌گیری بالا را ۳/۱۵۲ و یا ۳/۱ سانتی‌متر نوشت.

صفرهایی که بعد از ارقام بامعنی باشند، جزء رقم‌های مهم محسوب می‌شوند و اگر قبل از ارقام بامعنی باشند رقم بامعنی منظور نمی‌شوند. مثلاً اعداد ۳/۱۵۸ ، ۴/۰۳۱ ، ۷/۰۰۸ ، ۹/۰۰۰ و یا ۰/۰۰۱۳۶۴ که از اندازه‌گیری به دست آمده باشند همه اعداد چهار رقمی هستند. صفرهایی که قبل از ارقام بامعنی نوشته می‌شوند جای ممیز را تعیین می‌کنند و اگر واحد اندازه‌گیری تغییر کند، تعداد این صفرها کم و زیاد شده و احیاناً حذف می‌شوند. لذا این صفرها جزء رقم‌های مهم و بامعنی محسوب نمی‌شوند. مثلاً اگر طول قطعه‌ی فلزی را اندازه گرفته باشیم و نتیجه‌ی آن ۳۷/۰ میلی‌متر باشد، می‌توانیم آن را با اعداد ۳/۷۰ سانتی‌متر، ۰/۳۷۰ دسی‌متر و یا ۰/۰۳۷۰ متر نیز نشان دهیم که همه‌ی آن‌ها اعداد سه رقمی هستند، و با تغییر واحد در تعداد ارقام بامعنی تغییری ایجاد نمی‌شود.

ممکن است نتیجه‌ی اندازه‌گیری عدد بزرگی باشد ولی با ارقام محدود؛ در این صورت برای نشان دادن بزرگی عدد از توان‌های ده استفاده می‌شود. مثلاً فرض کنید سه رقم مهم ۵۶۷ از طول موج نوری را توانسته‌ایم تعیین کنیم و می‌خواهیم آن را بر حسب آنگستروم بیان کنیم. چون می‌دانیم بزرگی این طول موج بالاتر از هزار آنگستروم می‌باشد لذا آن را به صورت $۵/۶۷\times۱۰^{۳}$ و یا ۵۶۷×۱۰ می‌نویسیم. یا فرض کنید طولی را اندازه گرفته‌ایم و عدد ۲۷۵ متر حاصل شده است؛ اگر بخواهیم آن را بر حسب سانتی‌متر بنویسیم باید این طور بنویسیم ۲/۷۵ و نمی‌توانیم آن را به صورت ۲۷۵۰۰ بنویسیم، چون در این صورت دارای پنج رقم مهم خواهد بود.

تعداد ارقام بامعنی اعداد ریاضی بی‌نهایت است. مثلاً منظور از عدد چهار در واقع عبارت است از ۴/۰۰۰۰ که تا بی‌نهایت جلویش صفر باشد.

محاسبات عددی:

در محاسباتی که با اعداد حاصل از اندازه‌گیری انجام می‌گیرد باید از ورود ارقام بی‌معنی جلوگیری کرد.

در جمع و تفریق اعداد باید اول دقت همه‌ی آن‌ها را یکی کرد و سپس عمل را انجام داد؛ و یا می‌توان بدون توجه به دقت آن‌ها، عمل جمع یا تفریق را انجام داد و سپس دقت حاصل را برابر با کم‌ترین دقت موجود در عوامل جمع یا تفریق تعیین کرد. به عنوان مثال می‌خواهیم سه عدد ۵/۲۸، ۳/۱، ۷/۰۲۳ سانتی‌متر را با هم جمع کنیم. به روش اول چنین می‌شود:

۵/۳+۳/۱+۷/۰=۱۵/۴

و به روش دوم:

۵/۲۸+۳/۱+۷/۰۲۳=۱۵/۴۰۳ → ۱۵/۴

دلیل این کار این است که چون ارقام دوم و سوم بعد از ممیز در عدد ۳/۱ مجهول است، سبب می‌شود که ارقام دوم و سوم بعد از ممیز در حاصل جمع نیز مجهول باشد.

در عمل یکی نمودن دقت و یا به طور کلی، کنار گذاشتن ارقام بی‌معنی، باید توجه کرد اگر رقمی که کنار گذاشته می‌شود بالاتر از ۵ باشد به رقم قبلی یک واحد اضافه شود، در غیر این صورت رقم قبلی همان مقدار خودش را حفظ می‌کند. به عنوان مثال فرض کنید اعداد ۲۳/۵۰۸، ۲۳/۵۰۰، ۲۳/۴۹۱ دارای دو رقم بامعنی باشند. در این صورت آن‌ها را باید به ترتیب به صورت ۲۴، ۲۳ و۲۳ نوشت.

در ضرب و تقسیم اعداد، معمولاً تعداد ارقام بامعنی حاصل برابر است با عدد ارقام بامعنی عددی که کم‌ترین رقم را داراست. مثلاًحاصل ضرب دو عدد ۳/۰۸ و ۴/۲ برابر ۱۳ می‌باشد و نمی‌توان آن را ۱۲/۹۳۶ نوشت. زیرا رقم‌های آخر اعداد، رقم‌های مشکوک هستند؛ یعنی ۴/۲ ممکن است ۴/۳ یا ۴/۱ باشد. در این صورت دیده می‌شود که اقلاً در حاصل ضرب مقدار ۰/۳۰۸ تغییر و عدم دقت پیش می‌آید و رقم دوم حاصل ضرب رقم مشکوک خواهد بود.

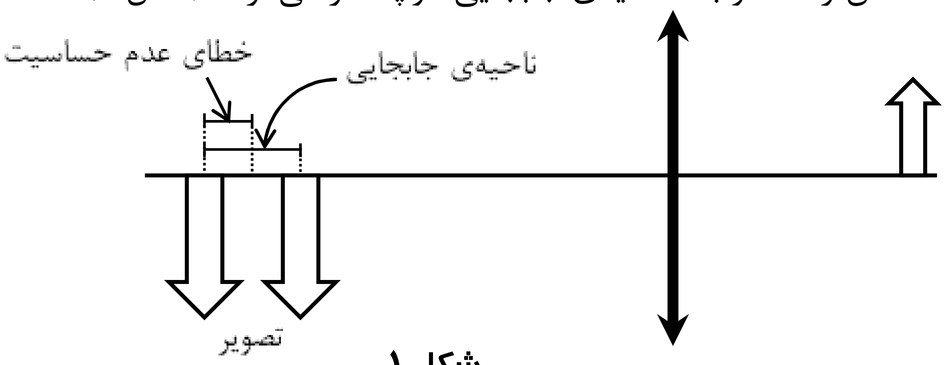
خطاهای اندازه‌گیری

می‌دانیم که برای اندازه‌گیری هر کمیتی باید آن را با مقداری از همان کمیت که به عنوان واحد انتخاب شده بسنجیم. نسبت مقدار کمیت به واحد آن را اندازه یا مقدار عددی آن کمیت می‌نامند. با توجه به این که همواره در اندازه‌گیری کمیت‌ها به دلایل گوناگونی (که شرح آن بعداً خواهد آمد)، دچار خطا می‌شویم، بین مقدار حقیقی آن کمیت (x) و مقداری که از اندازه‌گیری حاصل شده (x') اختلاف $\delta x = x' - x$ موجود است که آن را خطا می‌نامیم. مثلاً در اندازه‌گیری طول یک میز به کمک خط‌کش باید درجه‌ی صفر خط‌کش را بر یک لبه‌ی میز منطبق کنیم و درجه‌ی مقابل لبه‌ی دیگر را بخوانیم. اغلب لبه‌ی دیگر میز درست در مقابل یکی از درجات خط‌کش قرار نمی‌گیرد و چنان چه خط‌کش بر حسب سانتی‌متر درجه‌بندی شده باشد نمی‌توان به دقت طول میز را تا کسری

از سانتی‌متر به دست آورد. یعنی کسری از سانتی‌متر را تنها می‌توان با حدس برآورد کرد. در این صورت طول میز با خطایی کم‌تر از یک سانتی‌متر اندازه‌گیری شده است. لیکن اگر خط‌کش بر حسب میلی‌متر مدرج شده باشد طول میز را می‌توان تا میلی‌متر اندازه گرفت و کم‌تر از میلی‌متر را با حدس تعیین نمود. در این صورت خطای اندازه‌گیری کم‌تر از یک میلی‌متر است. پس دقت اندازه‌گیری به وسایلی که برای این منظور به کار می‌روند ارتباط دارند.

علاوه بر خطایی که ذکر شد خطای دیگری در هنگام تشخیص در عمل وارد می‌شود که بزرگی و کوچکی آن به آزمودگی و مهارت شخص آزمایش کننده بستگی دارد؛ مانند تشخیص انطباق درجه‌ی صفر خط‌کش با لبه‌ی میز در مثالی که از نظرتان گذشت.

گاهی حین آزمایش به نوعی خطا برخورد می‌کنیم که نه بستگی به دقت دستگاه اندازه‌گیری دارد و نه ارتباطی به دقت شخص آزمایش کننده، بلکه این خطا ناشی از عدم حساسیت دستگاه است و به همین دلیل نام آن را خطای عدم حساسیت می‌گذاریم. مثلاً چنان چه توسط یک عدسی محدب تصویری حقیقی از یک جسم نورانی روی یک صفحه تشکیل دهیم، خواهیم دید که با جابجا کردن صفحه‌ی تصویر در یک ناحیه‌ی محدود، وضوح آن به‌هم نخواهد خورد. این خطا در این آزمایش خاص، بستگی به ابیراهی در ساختمان عدسی دارد و هر قدر از میزان این ابیراهی کاسته گردد دستگاه حساس‌تر شده و بُعد ناحیه‌ی جابجایی کوچک‌تر می‌گردد (شکل ۱).



شکل ۱

علاوه بر این، تعداد زیادی از خطاها از محیط و شرایط آزمایش ناشی می‌شود. از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان تغییر درجه‌ی حرارت آزمایشگاه، لرزش میز، وجود جریان هوا و ... نام برد. پس منابع خطا را می‌توان به سه دسته‌ی کلی تقسیم کرد: خطای شخصی، دستگاه و عوامل محیطی. البته ذکر تمام منابع خطا، کاری نشدنی است زیرا منابع خطا زیاد هستند و انواع آن طیف بسیار وسیع و گسترده‌ای دارد. گاهی می‌توان تعدادی از خطاهای موجود در آزمایش را تشخیص داد؛ در این صورت تا آن جا که امکان دارد باید آن‌ها را کم کرد و در گزارش آزمایش آن‌ها را بر شمرد.

خطاهای تصادفی:

عواملی که برای خطا نام بردیم و عوامل دیگری که برای ما مشخص نیستند باعث می‌گردد که هر گاه یک اندازه‌گیری را چند بار تکرار کنیم نتایج اندازه‌گیری با هم متفاوت باشد به طوری که

تفاوت آن‌ها با مقدار میانگین عددهای اتفاقی مثبت و منفی باشد، در این صورت خطای اندازه‌گیری از نوع تصادفی است که بیش‌تر با این نوع خطا سر و کار داریم.

خطاهای منظم:

این نوع خطاها به طور منظم و در یک جهت اتفاق می‌افتند. یعنی مقدار این نوع خطا برای هر اندازه‌گیری که تکرار می‌شود یکسان بوده و یا منظم تغییر می‌کند. برای مثال اگر ترازویی درست نباشد، یعنی بدون بار در حال تعادل نباشد، و اندازه گیرنده، متوجه نادرستی آن نشود، اندازه‌گیری‌های وی با این ترازو دارای خطای منظم خواهد بود. یعنی همه‌ی اندازه‌هایش مقداری بیش‌تر و یا کم‌تر از اندازه‌ی واقعی خواهد بود. برای مثال دیگر ممکن است عقربه‌ی ولت‌متری چسبندگی و گیر داشته باشد و سبب شود اندازه‌ها را مقداری کم‌تر نشان دهد. و یا فرض کنید طول میله‌ی فلزی را به دفعات زیاد اندازه می‌گیریم و هر بار نتیجه‌ی به دست آمده از نتیجه‌ی قبلی مقداری بیش‌تر می‌شود، که ممکن است به خاطر افزایش تدریجی طول میله در اثر بالا رفتن تدریجی درجه‌ی حرارت آن باشد.

گاهی از روی نظم و ترتیب این نوع خطاها، منابع خطا تا حدودی شناخته شده و خطا را می‌توان کنترل کرد. ولی گاهی هم برآورد این نوع خطا خیلی مشکل می‌شود، و گاهی هم خطا به علت یکسان بودن آن برای هر دفعه اندازه‌گیری، ممکن است خود را نشان ندهد. بیش‌تر عوامل این نوع خطا شخصی و مربوط به دستگاه می‌باشند.

تعاریف خطای مطلق و نسبی و درصد خطا

قبل از این که به چگونگی محاسبه‌ی خطاها بپردازیم لازم می‌دانیم که خطای مطلق، خطای نسبی و درصد خطا را تعریف کنیم:

الف) خطای مطلق:

قبلاً گفته شد که هرگز نمی‌توان به مقدار واقعی یک کمیت دست یافت چون که محدودیت هایی در دقت وسایل و نیز در آزمودگی شخص آزمایش کننده وجود دارد. چنان چه x مقدار واقعی و x' مقدار اندازه گیری شده یک کمیت باشند، در آن صورت اختلاف بین این دو را خطای مطلق میگوییم؛ یعنی:

$$\delta x = |x' - x|$$

هرگز نمی‌توان مقدار خطای δx و نیز علامت آن را مشخص نمود (در غیر این صورت خطا مفهومی نخواهد داشت) لذا همواره قدرمطلق حداکثر خطایی را که ممکن است در سنجش یک کمیت رخ دهد، به حساب می‌آوریم و آن را با Δx نمایش می‌دهیم. بنابراین غالباً خطایی که در اندازه‌گیری x مرتکب می‌شویم از Δx کوچک‌تر است. یعنی این که:

$$x \in \left]x' - \Delta x, x' + \Delta x\right[\quad \text{یا} \quad x' - \Delta x < x < x' + \Delta x$$

توجه داشته باشید که اندازه‌گیری یک کمیت در صورتی دارای معنی فیزیکی خواهد بود که خطای مطلق آن کوچک‌تر از مقدار خود کمیت باشد، یعنی: $x' > \delta x$.

ب) خطای نسبی:

مقدار خطای مطلق، میزان دقت آزمایش را نشان نمی‌دهد. لذا برای تأمین این منظور خطای نسبی را تعریف می‌کنیم.

چنان چه در اندازه‌گیری طولی برابر با پنج متر، یک سانتی‌متر اشتباه کرده باشیم، مانند این است که در هر متر دو میلی‌متر اشتباه شده باشد، ولی اگر این خطا در اندازه‌گیری طولی مساوی ۵۰ سانتی‌متر رخ دهد مثل این است که در هر متر دو سانتی‌متر خطا مرتکب شده‌ایم.

بنابراین دقت اندازه‌گیری در آزمایش اول، ده برابر دقت اندازه‌گیری آزمایش دوم است. پس آن چه را که عملاً باید به کار ببریم نسبت خطای مطلق Δx به مقدار اندازه گرفتنی x' می‌باشد که آن را خطای نسبی می‌نامیم $(\frac{\Delta x}{x'})$. بر اساس آن چه که در بالا متذکر شدیم، خطای نسبی، دقت اندازه‌گیری را تعیین می‌کند. اندازه‌گیری یک کمیت در صورتی قابل قبول است که خطای نسبی مقدار کوچکی باشد (دقت آزمایش زیاد باشد).

ج) درصد خطا:

طبق تعریف درصد خطا به صورت زیر است:

۱۰۰ ×خطای نسبی = درصد خطا

برآورد خطا:

در این جا فقط روشی که عموماً برای برآورد خطاهای تصادفی به کار می‌رود مورد بررسی قرار می‌گیرد.

همان طور که بیان شد با توجه به وجود خطا در اندازه‌گیری مقدار واقعی کمیت معنی روشنی ندارد ولی می‌توان از مقدار دقیق کمیت گفتگو کرد. با تخمین خطا می‌خواهیم حدودی را که این مقدار دقیق در آن فاصله قرار دارد مشخص کنیم. مسلم است هر قدر حدود به هم نزدیک‌تر باشند مقدار کمیت دقیق‌تر به دست خواهد آمد. با یک دفعه اندازه‌گیری نمی‌توان مقدار دقیق و خطای آن را به دست آورد. ممکن است پیشنهاد شود که مقدار کوچک‌ترین درجه‌ی وسیله اندازه‌گیری به عنوان مقدار خطا منظور شود ولی در این صورت امکان وجود سایر منابع خطا که اثرشان معمولاً کم نیست نادیده گرفته می‌شود. مثلاً در اندازه‌گیری با ترازویی که برای وزنه‌های کم‌تر از یک گرم حساس نیست، نمی‌توان کوچک‌ترین درجه آن را که مثلاً یک دهم گرم است به عنوان خطا منظور

داشت. بنابراین برای هر اندازه‌گیری مهمی نمی‌توان به یک دفعه اندازه‌گیری اکتفا کرد. بلکه اندازه‌گیری را باید به دفعات تکرار کرد و مشاهده نمود که نتایج اندازه‌گیری به چه میزان نزدیک هم و یا دور از هم قرار دارند. هرگاه مشاهده شد که هر تکرار اندازه‌گیری به نتایج تقریباً یکسانی منجر می‌شود لزومی ندارد که اندازه‌گیری را زیاد تکرار کرد. در هر صورت میانگین نتایج اندازه‌گیری به عنوان مقدار دقیق یا محتمل‌ترین مقدار کمیت بیان می‌شود.

پس اگر کمیت x را n بار اندازه‌گیری کنیم و نتایج هر بار اندازه‌گیری را با $x_1, x_2, ..., x_n$ مشخص کنیم، میانگین آن‌ها که محتمل‌ترین مقدار x است و با $\bar{x}$ نشان داده می‌شود چنین به دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

برای برآورد خطای تصادفی از روش‌های آماری باید استفاده کرد که مختصری از آن را بیان می‌کنیم:

اگر تعداد اندازه‌گیری‌ها کم بود مثلاً حدود سه بار، حداکثر انحراف از میانگین اندازه‌گیری‌ها را به عنوان خطا معین می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= |x_1 - \bar{x}| \\ \Delta x_2 &= |x_2 - \bar{x}| \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x = |x_i - \bar{x}|_{\max} \\ \Delta x_3 &= |x_3 - \bar{x}| \end{aligned}$$

اگر تعداد تکرار آزمایش زیاد بود، میانگین انحراف از میانگین اندازه‌گیری‌ها را برای میزان خطا منظور می‌کنیم:

$$\Delta x = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + ...}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

در اندازه‌گیری‌های دقیق کمیت دیگری به عنوان خطا منظور می‌شود که به آن انحراف معیار گویند و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\mathrm{S} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

بدین ترتیب هرگاه خطای اندازه‌گیری از نوع تصادفی بوده و توزیع مقادیر اندازه‌گیری شده متقارن باشد، نتیجه‌ی اندازه‌گیری چنین نوشته می‌شود:

$$\text{مقدار کمیت} = \bar{x} \pm \Delta x$$

که در آن $\bar{x}$ میانگین اندازه‌گیری‌ها و Δx حداکثر انحراف از میانگین خطا و یا انحراف معیار است.

در حالت کلی بیش‌ترین خطای ممکن مجموع خطای تصادفی و خطای دستگاه می‌باشد ولی در صورتی که Δx به دست آمده برای خطای تصادفی از خطای دستگاه که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید خیلی کوچک‌تر باشد برای در نظر گرفتن بیش‌ترین خطای ممکن خطای دستگاه را به عنوان Δx انتخاب می‌کنیم:

خطای عدم حساسیت + کوچک‌ترین درجه‌بندی که با وسیله می‌توان خواند = خطای دستگاه

محاسبه‌ی نظری خطا برای کمیت‌هایی که به طور غیرمستقیم اندازه‌گیری می‌شوند:

فرض کنید کمیت x به کمک کمیت‌های a، b، c و ... که مستقیماً اندازه‌گیری می‌شوند به دست آید. منظور از محاسبه‌ی خطا این است که با استفاده از خطاهایی که روی اندازه‌گیری کمیت‌های بالا مرتکب می‌شویم، یعنی Δa، Δb، Δc و ... ، خطای Δx را که در نتیجه‌ی نهایی x حاصل می‌شود محاسبه نماییم. قبل از این که به دستور کلی محاسبه‌ی خطا بپردازیم چند نمونه از محاسبه‌ی خطا در حالات ساده را شرح می‌دهیم:

۱ـ خطای حاصل جمع:

چنان چه $x = a + b$ باشد و حداکثر خطاهایی که در اندازه‌گیری مقادیر a و b رخ می‌دهند، به ترتیب برابر Δa و Δb باشند، در نتیجه مقداری که برای x به دست می‌آید به اندازه‌ی Δx از مقدار واقعی آن اختلاف خواهد داشت که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$x + \Delta x = (a + \Delta a) + (b + \Delta b)$$

$$\Delta x = \Delta a + \Delta b$$

چنان چه ملاحظه می‌کنید، برای محاسبه‌ی خطای مطلق می‌توان از آن دیفرانسیل گرفت و علامات دیفرانسیل را به Δ تبدیل کرد:

$$x = a + b$$

$$d_x = da + db \Rightarrow \Delta x = \Delta a + \Delta b$$

یعنی حداکثر خطای مطلق حاصل جمع چند مقدار، برابر با حاصل جمع حداکثر خطاهای مطلق آن مقادیر است و از آن جا خطای نسبی $\frac{\Delta x}{x}$ برابر است با:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b}$$

۲ـ خطای تفاضل:

اگر $x = a - b$ باشد، در آن صورت می‌توان نوشت:

$$x+\Delta x=(a+\Delta a)-(b+\Delta b)\Rightarrow \Delta x=\Delta a-\Delta b$$

اما علامت‌های Δa و Δb معلوم نیستند. به خاطر حصول حداکثر خطا می‌باید حاصل جمع مقادیر خطاها را منظور کرد؛ یعنی:

$$\Delta x=\Delta a+\Delta b$$

خطای مطلق در این حالت نیز به طریق دیفرانسیل‌گیری قابل محاسبه است با این تفاوت که می‌بایست علامت منفی را به مثبت تبدیل کرد.

بنابراین خطای مطلق تفاضل دو مقدار، مساوی با مجموع خطاهای مطلق آن دو می‌باشد.

خطای نسبی در این حالت برابر است با:

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta a+\Delta b}{a-b}$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید خطای نسبی تفاضل بیش‌تر از خطای نسبی حاصل جمع است.

۳ـ خطای حاصل ضرب:

چنان چه $x=a\cdot b$ باشد، می‌توان نوشت:

$$x+\Delta x=(a+\Delta a)(b+\Delta b)\Rightarrow \Delta x=a\cdot \Delta b+b\cdot \Delta a+\Delta a\cdot \Delta b$$

با چشم پوشی از آخرین جمله‌ی سمت راست رابطه‌ی بالا در مقایسه با جملات دیگر، خواهیم داشت:

$$\Delta x=a\cdot \Delta b+b\cdot \Delta a$$

به طور مشابه با روش دیفرانسیل‌گیری از تابع x داریم:

$$x=a\cdot b$$

$$d_x=a\cdot db+b\cdot da\Rightarrow \Delta x=a\cdot \Delta b+b\cdot \Delta a$$

که دقیقاً همان نتیجه‌ای است که از محاسبه‌ی بالا به دست آمد. خطای نسبی برابر خواهد بود با:

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{a\Delta b+b\Delta a}{ab}=\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta a}{a}$$

به همین طریق اگر $x=a\cdot b\cdot c\ldots$ باشد:

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta c}{c}+\ldots$$

پس خطای حاصل ضرب چند مقدار، برابر با مجموع خطاهای نسبی آن مقادیر است.

۴ـ خطای خارج قسمت:

اگر $x=\frac{a}{b}$ باشد، به پیروی از روشی که در مورد حاصل ضرب به کار رفت، نتیجه می‌شود:

$$x+\Delta x=\frac{a+\Delta a}{b+\Delta b}$$
$$\Delta x=\frac{a+\Delta a}{b+\Delta b}-\frac{a}{b}$$
و از آن جا با صرف نظر کردن از Δb در مقایسه با b^2:
$$\Delta x=\frac{b\cdot\Delta a-a\cdot\Delta b}{b^2}$$
از راه دیفرانسیل‌گیری از تابع $x=\frac{a}{b}$ درست همین نتیجه حاصل می‌شود:
$$dx=d\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{(b\cdot da)-(a\cdot db)}{b^2}\Rightarrow\Delta x=\frac{(b\cdot\Delta a)-(a\cdot\Delta b)}{b^2}$$
خطای نسبی چنین خواهد بود:
$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta b}{b}$$
اما با توجه به این که حداکثر خطا مورد نظر است (توجه کنید که علامت‌های Δa و Δb مشخص نیستند) باید خطای نسبی را از رابطه‌ی زیر به دست آورد:
$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$$
پس: خطای نسبی خارج قسمت دو مقدار، برابر با مجموع خطاهای نسبی آن دو مقدار می‌باشد.

۵ـ دستور کلی:

از نتیجه‌ی آن چه در مثال‌های قبل دیدیم به یک دستور کلی دست خواهیم یافت:

هر گاه تابعی x از پارامترهای a، b، c و ... (که مستقیماً قابل اندازه‌گیری باشند) باشد یعنی $x=f(a,b,c,...)$ برای محاسبه ی حداکثر خطای مطلق (Δx) بر حسب خطاهای مطلق $\Delta a,\Delta b,\Delta c,...$ باید از طرفین رابطه‌ی بالا دیفرانسیل گرفت و به جای دیفرانسیل‌های $da,db,dc,...$ خطاهای ماکزیمم $\Delta a,\Delta b,\Delta c,...$ را قرار داد. یعنی:
$$\Delta x=\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial f}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial f}{\partial c}\Delta c+...$$
که در آن مثلاً $\frac{\partial f}{\partial a}$ مشتق جزئی تابع $f(a,b,c,...)$ نسبت به a می‌باشد.

۶ـ محاسبه‌ی خطای نسبی از طریق دیفرانسیل لگاریتمی:

در ریاضیات می‌بینیم که اگر $x=\ln a$ (لگاریتم در مبنای عدد نپر) باشد:
$$dx=d\ln a=\frac{da}{a}$$
که طرف راست رابطه‌ی بالا خود نظیر خطای نسبی کمیت a می‌باشد. پس با این آگاهی در می‌یابیم که چنان چه خطای نسبی کمیتی را بخواهیم محاسبه کنیم، بهتر است آن کمیت را به

صورت لگاریتمی بیان کرده (از آن لگاریتم بگیریم) سپس دیفرانسیل‌گیری کنیم (پس از ساده کردن رابطه‌ی سمت راست).

مثلاً اگر داشته باشیم تابع $x=\frac{a}{b}$ ابتدا از طرفین آن لگاریتم گرفته و سپس دیفرانسیل می‌گیریم:

$$\ln x=\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$$

$$d(\ln x)=d[\ln a-\ln b]\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{da}{a}-\frac{db}{b}$$

که چنان چه علامت دیفرانسیل را به Δ و علامت منفی را به مثبت تبدیل کنیم:

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$$

این همان نتیجه‌ای است که از محاسبه‌ی مستقیم خطای نسبی تابع $x=\frac{a}{b}$ قبلاً به دست آمد.

مثال عملی: در حرکت دورانی رابطه‌ی نیرو با سرعت زاویه‌ای و شعاع دوران به شکل زیر است:
$F=m\omega^2r$ که اگر بخواهیم خطای نسبی F را حساب کنیم خواهیم داشت

$$\ln F=\ln(m)+\ln(\omega^2)+\ln(r)$$

$$\frac{dF}{F}=\frac{dm}{m}+2\frac{d\omega}{\omega}+\frac{dr}{r}\qquad \text{از آن جا}\ \Rightarrow\qquad \frac{\Delta F}{F}=\frac{\Delta m}{m}+2\frac{\Delta\omega}{\omega}+\frac{\Delta r}{r}$$

نمونه‌ای از محاسبه‌ی عددی خطاها:

مثال ۱: در اندازه‌گیری ضریب اصطکاک استاتیک سطوح مسطح رابطه‌ی ضریب اصطکاک به صورت $\mu_s=\tan\theta$ می‌باشد.

برای محاسبه‌ی خطای ضریب اصطکاک باید از رابطه‌ی بالا دیفرانسیل بگیریم:

$$d\mu_s=\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta\qquad\Rightarrow\qquad\Delta\mu_s=\left(1+\tan^2\theta\right)\cdot\Delta\theta$$

در اندازه‌گیری‌هایی که برای زاویه‌ی θ به دست آمده، مقادیر زیر حاصل شده است:

$$\theta_1=28^\circ,\theta_2=24^\circ,\theta_3=29^\circ$$

از مقادیر فوق θ_m برابر است با:

$$\theta_m=\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}=\frac{28^\circ+24^\circ+29^\circ}{3}=27^\circ$$

پس:

$$\delta\theta_1=|\theta_m-\theta_1|=1^\circ,\delta\theta_2=|\theta_m-\theta_2|=3^\circ,\delta\theta_3=|\theta_m-\theta_3|=2^\circ$$

و از آن جا،

$$\delta\theta_{\max}=3^\circ$$

خطای دستگاه اندازه‌گیری در این آزمایش $\left(1^{\circ}\right)$ است. که از $\delta\theta_{\max}$ این کوچک‌تر است.
خطای عدم حساسیت در این آزمایش مشهود نیست.

پس:
$$\Delta\theta = 3^{\circ} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\theta = 0.05 \quad \text{Rd}$$

و
$$\mu_s = \tan\theta_m = tg27^{\circ} = 0.51 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\mu_s = (1+\tan^2 27^{\circ})\times 0.05$$

$$\Delta\mu_s \cong 0.06$$

بنابراین مقدار ضریب اصطکاک را به این طریق نشان می‌دهیم:

$$\mu_s = 0.5 \pm 0.06 \qquad\qquad 0.44 < \mu_s < 0.56$$

مثال ۲: در آزمایش اندازه‌گیری ضریب هدایت حرارتی داریم:

$$k = \frac{Q\cdot L}{TA(t_1 - t_2)}$$

برای به دست آوردن خطای نسبی k از طرفین رابطه‌ی بالا لگاریتم می‌گیریم:

$$\ln k = \ln\left|\frac{Q\cdot L}{TA(t_1 - t_2)}\right| = \ln Q + \ln L - \left|\ln T + \ln A + \ln(t_1 - t_2)\right|$$

حال از طرفین این رابطه، دیفرانسیل می‌گیریم:

$$\frac{dk}{k} = \frac{dQ}{Q} + \frac{dL}{L} - \frac{dT}{T} - \frac{dA}{A} - \frac{d(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2}$$
$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta t_1}{t_1 - t_2} + \frac{\Delta t_2}{t_1 - t_2}$$

مثال ۳: به عنوان سومین مثال، اندازه‌گیری گرمای ویژه‌ی جسمی با کالری‌متر را در نظر می‌گیریم:

در چنین آزمایشی برای به دست آوردن نتیجه‌ی نهایی، دو کمیت مختلف را باید اندازه بگیریم که یکی دما و دیگری جرم جسم است. فرض کنید که دمای کالری متر در حدود $^{\circ}$۵ بالا رود و دماسنجی که در این آزمایش به کار می‌رود تا $^{\circ}$۰/۵ مدرج شده باشد. با چنین دماسنجی نمی‌توان دمایی را با تقریبی کم‌تر از $^{\circ}$۰/۵ اندازه گرفت. بنابراین افزایش دمای کالری‌متر که پنج درجه ($^{\circ}$۵) است با تقریبی برابر ۰/۱ مقدار اولیه‌ی خود اندازه گرفته می‌شود. چنان چه جرم آب داخل کالری‌متر ۲۰۰gr، جرم ظرف آن ۲۰gr و گرمای ویژه‌ی ظرف ۰/۱cal/gr°C)باشد ، ظرفیت گرمایی ظرف کالری‌متر برابر ۲ کالری خواهد بود. با ترازویی دقیق می‌توان وزن ظرف کالری‌متر و آب داخل آن را تا یک میلی‌گرم تقریب یعنی با دقتی برابر با ۶-۱۰×۵ مقدار آن اندازه گرفت. لیکن چون افزایش دما تا ۰/۱ تقریب اندازه‌گیری می‌شود، چنین دقتی در توزین بیهوده است و تأثیری در دقت نتیجه‌ی اصلی یعنی گرمای ویژه ندارد و کاملاً کافی است که توزین با تقریب یک گرم انجام گیرد.

علاوه بر این از بررسی قبلی می‌توان به این نتیجه نیز رسید که برای حصول نتیجه‌ی دقیق‌تر کدام یک از کمیت‌ها را باید با دقت بیش‌تری اندازه گرفت. در مثال فوق باید سعی شود که دقت اندازه‌گیری دما بیش‌تر شود (دماسنج دقیق‌تر به کار برده شود) یا این که جرم جسم مورد آزمایش و آب کالری‌متر را طوری برگزید که افزایش دما بیش‌تر گردد.

تذکر: در این مثال عمداً از خطای آزمایش کننده صرف نظر شده است (به منظور سادگی).

رسم منحنی و کاربردهای آن

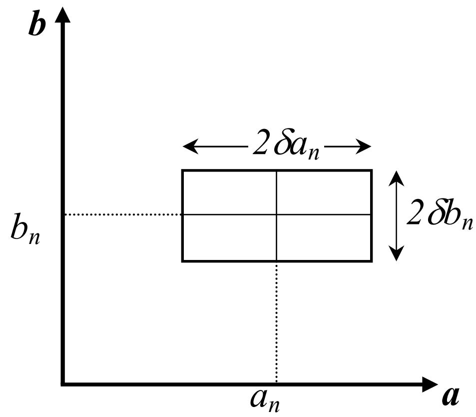
در بعضی از آزمایش‌ها لازم است که منحنی تغییرات یک کمیت را بر حسب دیگری رسم نمود که در بسیاری از موارد به کمک این منحنی‌ها مقادیر مجهول دیگری تعیین می‌شوند. به عنوان مثال اگر در آزمایش اسپکتروسکوپی، منحنی ضریب شکست n بر حسب طول موج λ را رسم کنیم، به وسیله‌ی آن می‌توان طول موج یک نور مجهول را به دست آورد. چنان چه منحنی حاصل از آزمایش، خطی باشد علاوه بر استفاده‌ی فوق می توان از روی ضریب زاویه و گاهی با استفاده از طول از مبدأ و عرض از مبدأ کمیات دیگری را تعیین نمود. مثلاً در آزمایش مطالعه‌ی حرکت نوسانی ساده و قانون بقای انرژی، منحنی T^2 (مجذور پریود حرکت نوسانی) بر حسب M (جرم آویخته به فنر) را رسم می کنیم. منحنی حاصل، خطی به صورت زیر خواهد شد (شکل ۲). با در نظر گرفتن رابطه‌ی بین T^2 و M که از طریق تئوری به دست می‌آید: $T^2 = \frac{4\pi^2}{k}M + \frac{4\pi^2}{k}m_f$ که در آن m_f جرم مؤثر فنر است. می‌بینیم که ضریب زاویه‌ی این خط (α) برابر است با: $\alpha = \frac{4\pi^2}{k}$

با استفاده از این رابطه می توان ضریب سختی فنر را به دست آورد یعنی $k = \frac{4\pi^2}{\alpha}$ باز با مراجعه به معادله‌ی خط فوق در می یابیم که عرض از مبدأ این منحنی برابر با $b = \alpha \cdot m_f$ است که با اندازه‌گیری آن از روی شکل می‌توان اثر جرم فنر را نیز تعیین نمود. روشن است که به هر یک از کمیات فوق، خطا نسبت داده می شود. برای تعیین هر یک از این خطاها، لازم است خطای شیب و خطای عرض از مبدأ و طول از مبدأ را به روش ترسیمی مشخص نمود. برای رسم منحنی و به دست آوردن خطاهای فوق‌الذکر باید نکات زیر را مورد توجه قرار داد:

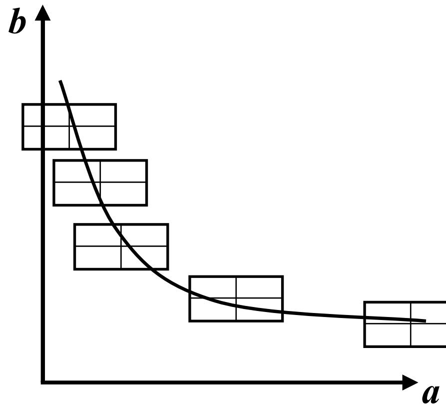
از آن جا که در اندازه‌گیری هر یک از کمیت‌هایی که می‌خواهیم منحنی‌اش را بر حسب دیگری رسم کنیم، خطایی رخ داده است پس در مورد هر اندازه گیری فقط یک نقطه نیست که می تواند متعلق به منحنی باشد؛ بلکه مکان هندسی نقاطی که در روابط زیر صدق کنند، می توانند یکی از نقاط منحنی باشند:

$$a = a_n \pm \delta a_n \quad \text{و} \quad b = b_n \pm \delta b_n$$

زیرنویس n نشان دهنده‌ی مرتبه‌ی آزمایش است. مثلاً a_3 و b_3 دو مقدار نظیر مربوط به اندازه‌گیری سومین آزمایش است. چنان چه ملاحظه می‌شود δa و δb نیز غالباً تابع مرتبه‌ی آزمایش هستند و به همین دلیل برای آن نیز اندیس n منظور شده است.[1] مکان هندسی مزبور، کلیه‌ی نقاط مستطیلی است به طول $2\delta a_n$ و به عرض $2\delta b_n$ (محور a ها افقی و محور b ها عمودی فرض شده است). در شکل ۲، هر یک از این نقاط درون مستطیل می تواند یکی از نقاط منحنی باشد. پس چنان چه ملاحظه می‌شود به جای تعدادی نقطه، یک سری مستطیل (به مراکز نقاط مذکور) به دست می‌آید که به منظور رسم دقیق منحنی باید آن را چنان ترسیم نمود که اولاً تمام مستطیل‌ها توسط آن قطع شوند و ثانیاً منحنی مذکور حتی‌الامکان به مراکز مستطیل‌ها نزدیک باشد (شکل ۳).



شکل ۲



شکل ۳

چون معمولاً از نمودارهای خطی، اطلاعات محاسباتی بهتری می‌توان به دست آورد، ما بیش‌تر سعی در رسم نمودارها به صورت خطی خواهیم داشت که در این راستا استفاده از خطوط بهترین، کم‌ترین و بیش‌ترین شیب نمودار ضروری است:

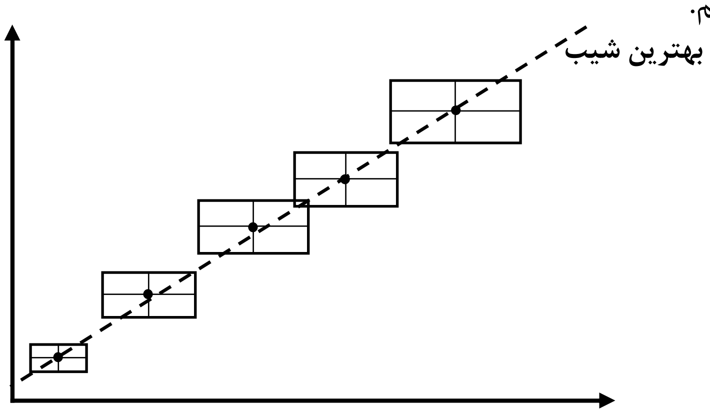
۱ـ روش رسم خط بهترین شیب

در حالتی خاص، وقتی که تغییرات منحنی خطی باشد نیز طریقه‌ی منظور کردن خطاها به

---

۱. از دو حال خارج نیست: یا این که a و b کمیت‌هایی هستند که مستقیماً قابل اندازه‌گیری‌اند و یا تابعی هستند از کمیت‌های دیگر که آن‌ها قابل اندازه‌گیری مستقیم‌اند. در حالت اول، با رجوع به مطالب این فصل در می‌یابیم که خطای هر کمیت که مستقیماً قابل اندازه‌گیری است برابر است با مجموع سه خطای (دستگاه، آزمایش کننده و عدم حساسیت). به فرض این که خطای دستگاه اندازه‌گیری ثابت بماند، خطای آزمایش کننده و عدم حساسیت اکثراً در هر مرتبه‌ی آزمایش تغییر می‌کنند و لذا کل خطای آن کمیت نیز تابع مراتب آزمایش می‌گردد. در حالت دوم که خود کمیت مستقیماً قابل اندازه‌گیری نیست خطای آن به صورت کلی $\delta a = f(x, y, ..., \delta x, \delta y, ...)$ نوشته می شود و از آن جا که هر یک از مقادیر $x, y, ...$ و نیز $\delta x, \delta y, ...$ تابع مرتبه‌ی آزمایش هستند (بنا به استدلال قبل)، خود مقدار δa تابع مرتبه‌ی آزمایش خواهد بود. پس دیدیم که در هر دو حالت، خطای یک کمیت غالباً تابع مرتبه‌ی آزمایش می‌باشد که مقدار آن از یک اندازه‌گیری به اندازه‌گیری دیگر تفاوت می‌کند.

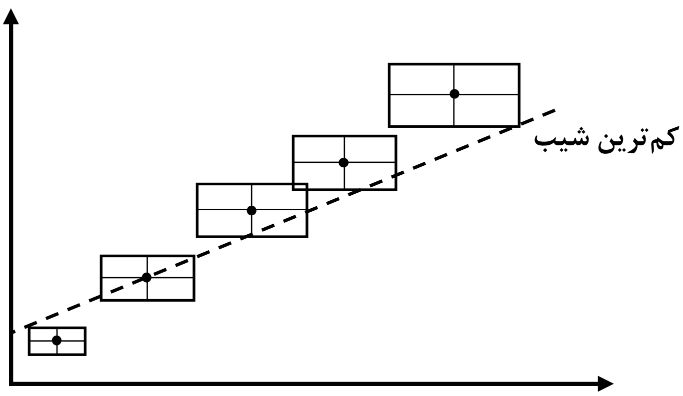
همان روشی است که در قسمت قبل ذکر شد. با این تفاوت کـه بـرای رسـم منحنـی در ایـن حالـت می‌توان از یک خط‌کش نیز مدد گرفت. بدین طریق که خط‌کـش را روی مسـتطیل‌هـا آن قـدر بایـد جابجا کرد که بهترین خط با توجه به نکات ذکر شده به دست آید. ایـن خـط را طبـق قـرارداد، خـط بهترین شیب می‌نامیم. شیب این خط دقیق‌ترین مقدار ممکن است (شـکل ۴) و بایـد در محاسـبات، همین مقدار وارد گردد. دو خط دیگر نیز می‌توان رسم کرد که تمام مستطیل‌ها را قطع کرده و دارای کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین شیب ممکن باشد. ایـن دو خـط را بـه ترتیـب خطـوط کـم‌تـرین شـیب و بیش‌ترین شیب می‌نامیم.



شکل ٤

۲ـ روش رسم خط کوچک‌ترین شیب (کم‌ترین شیب):

چنان چه خط واصل، بین رأس پایین سمت راست بالاترین مستطیل و رأس فوقانی سمت چپ پائین‌ترین مستطیل، تمام مستطیل‌های دیگر را قطع کند، می‌تواند به عنوان خط کوچک‌ترین شـیب منظور شود. در غیر این صورت در حالی که خط‌کش را روی یکی از دو رأس قرار داده‌ایـم، یـک سـر دیگر را آن قدر جابجا می‌کنیم که شرط قطع کردن تمام مستطیل‌ها محقق گردد (شکل ۵).

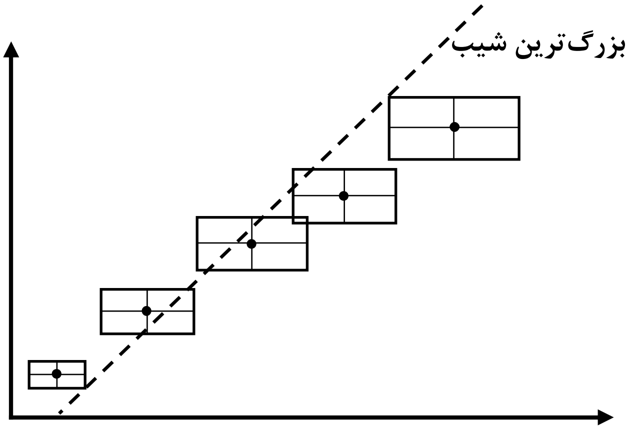


شکل ۵

۳ـ روش رسم خط بزرگ‌ترین شیب :

یک سر خط‌کش را روی رأس فوقانی سمت چپ بالاترین مستطیل و سر دیگـر آن را روی رأس تحتانی سمت راست پائین‌ترین مستطیل قرار دهید. اگر شرط قطع کردن تمامی مستطیل‌هـا تحقـق

پذیرفت که این خط خود خط بزرگ‌ترین شیب خواهد بود و در غیر این صورت نیز بـا جابجـا کـردن یک سر خط‌کش، تا تحقق شرط فوق می‌توان این خط را پیدا نمود (شکل ۶).

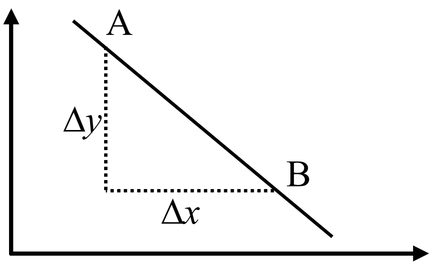


شکل ۶

طریقه‌ی به دست آوردن شیب یک خط

با تکیه بر ریاضیات مقدماتی می‌دانید که شیب یک خـط (α) از رابطـه‌ی $\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ بـه دسـت می‌آید که Δy یک نمو در y و Δx یک نمو x است.

به طریق رسم می‌توان به راحتی دریافت که Δy و Δx دو ضلع قائمه‌ی یک مثلث دلخـواه کـه وتر آن قسمتی از خط مذکور است، می‌باشد (شکل ۷). بنـابراین برای پیدا کردن شیب خط کافی است که از دو نقطـه ی دلخـواه A و B روی خط، دو خط به موازات محورهای افقـی و عمـودی رسم نمود تا به کمک آن‌ها یک مثلث قائم‌الزاویـه سـاخته شـود. نسبت طول ضلع عمـودی بـه ضـلع افقـی (برحسـب واحـدهای انتخاب شده روی این محورها) ضریب زاویه یا شیب خط است.



شکل ۷

تذکر: برای دقت بیش‌تر در محاسبه‌ی شیب بهتر است که اضـلاع مثلـث حتـی‌الامکـان بـزرگ انتخاب گردند.

خطای شیب و خطای عرض از مبدأ:

هر سه خط بهترین، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین شیب را رسـم نمـوده و شـیب هـر یـک را طبـق روش فوق به دست می‌آوریم:

شیب خط کوچک‌ترین شیب = α_1

شیب خط بهترین شیب = α_0

$\alpha_2 =$ شیب خط بزرگ‌ترین شیب

$\delta\alpha_1 = \alpha_0 - \alpha_1$

$\delta\alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_0$

و از این دو هر کدام بزرگ‌تر بود خطای شیب محسوب می‌شود.

برای به دست آوردن خطاهای عرض از مبدأ و طول از مبدأ باید همان کارهایی را که در مورد شیب‌های این خطوط انجام دادیم در مورد عرض از مبدأ و طول از مبدأ آن‌ها انجام دهیم؛ مثلاً اگر داشته باشیم:

$b_0 =$ عرض از مبدأ بهترین شیب

$b_1 =$ عرض از مبدأ کوچک‌ترین شیب

$b_2 =$ عرض از مبدأ بزرگ‌ترین شیب

$\Delta b_1 = b_1 - b_0$

$\Delta b_2 = b_0 - b_2$

و از این دو هر کدام بزرگ‌تر بود خطای عرض از مبدأ محسوب می‌شود.

یک مثال عملی: در آزمایش مطالعه‌ی حرکت نوسانی که با فنر انجام می‌شود، در پایان آزمایش، خواسته شده که منحنی T^2 بر حسب M را رسم کرده و از روی آن ضریب سختی فنر و اثر جرم را محاسبه کنیم (شکل ۸). روشن است که انتظار می‌رود هر یک از کمیات خواسته شده‌ی فوق با در نظر گرفتن خطایشان ارایه گردند. لذا ناگزیر هستیم هر سه خط بهترین، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین شیب را رسم کنیم. با مراجعه به رابطه‌ی بین T^2 و M می‌بینیم که:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}M + \frac{4\pi^2}{k}m_f$$

منحنی حاصل از رسم T^2 و M یک خط راست با ضریب زاویه‌ی $\frac{4\pi^2}{k}$ و عرض از مبدأ $\frac{4\pi^2}{k}m_f$ است. لذا پس از رسم سه خط فوق‌الذکر و به دست آوردن مقادیر α_2، α_0، α_1، b_2، b_0 و b_1 مقادیر خواسته شده را با توجه به خطایشان می توانیم تعیین کنیم. چنان چه خطای شیب، $\delta\alpha$ باشد داریم:

$$\alpha = \frac{4\pi^2}{k} \Rightarrow \frac{\delta k}{k} = \frac{\delta\alpha}{\alpha} \Rightarrow \delta k = \frac{4\pi^2}{{\alpha_0}^2}\delta\alpha$$

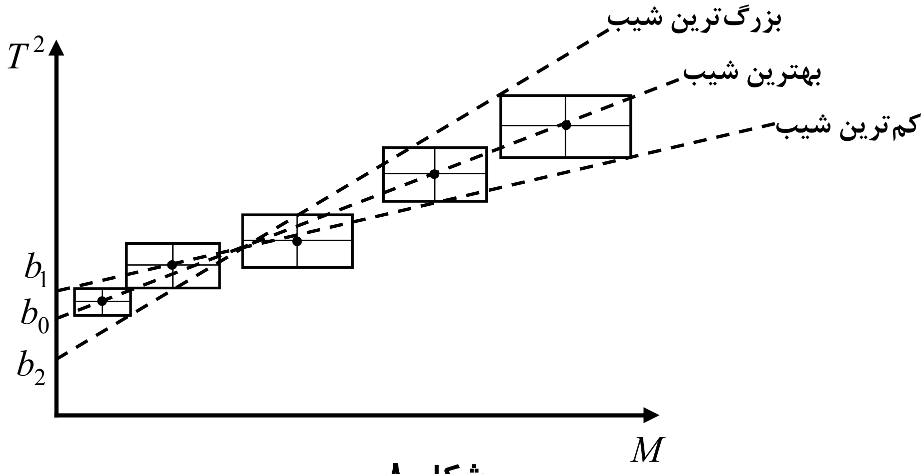
از رابطه‌ی فوق δk محاسبه می‌شود. اگر δb خطای عرض از مبدأ باشد، می‌توان نوشت:

$$b = \frac{4\pi^2}{k}(m_f) = \alpha(m_f) \Rightarrow m_f = \frac{b}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \delta(m_f) = \frac{\alpha \cdot \delta b + b \cdot \delta\alpha}{{\alpha_0}^2} \Rightarrow \delta(m_f) = \frac{\alpha_0 \cdot \delta b + b_0 \cdot \delta\alpha}{{\alpha_0}^2}$$

با جایگزین کردن $\delta\alpha$ و δb در رابطه‌ی بالا خطای m_f یعنی اثر جرم فنر محاسبه می‌گردد و لذا می‌توان بعد از محاسبه، مقادیر k و m_f را به صورت روابط زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} k = \dfrac{4\pi^2}{\alpha_0} \pm \dfrac{4\pi^2}{{\alpha_0}^2} \cdot \delta\alpha \\ m_f = \dfrac{b_0}{\alpha_0} \pm \dfrac{\alpha_0 \cdot \delta b + b_0 \cdot \delta\alpha}{{\alpha_0}^2} \end{cases}$$



شکل ۸

تذکر: محاسبه‌ی عرض از مبدأ و طول از مبدأ در صورتی ارزشمند است که خطای نسبی $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ و $\frac{\Delta b}{b}$ مقادیر کوچکی باشند، در غیر این صورت این روش آزمایش برای تعیین α و b مناسب نیست.

رسم منحنی در صفحات با مقیاس‌های مختلف

الف) مقیاس میلی‌متری:

کاغذ میلی‌متری دارای ابعاد (۲۰cm×۳۰cm) می‌باشد که تقسیمات روی هر دو محور آن میلی‌متری است. برای رسم منحنی روی کاغذ میلی‌متری باید به نکات زیر توجه کرد:

۱ـ انتخاب واحد باید طوری باشد که تمام اعداد به دست آمده از آزمایش در روی محورها بگنجد.

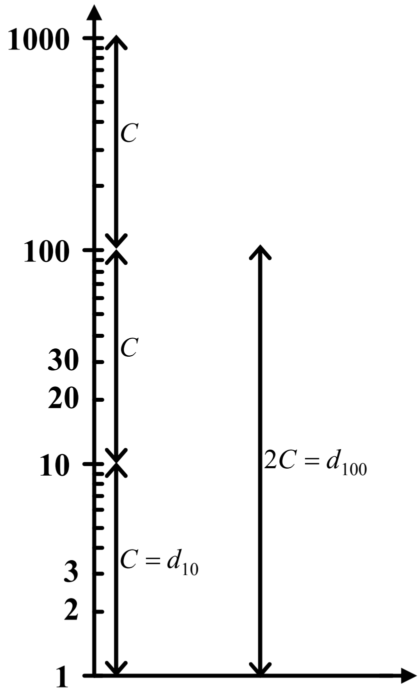
۲ـ واحد را روی محورها به گونه‌ای باید اتخاذ نمود که حتی‌الامکان از تمام صفحه‌ی کاغذ میلی‌متری استفاده شود.

۳ـ بهتر است واحدها شامل تعداد صحیحی از خانه‌های کاغذ میلی‌متری باشد.

۴ـ سعی کنید انتخاب واحد به گونه‌ای باشد که کوچک‌ترین خطای مطلق یک کمیت با طولی بیش از یک میلی‌متر نمایش داده شود.

ب) مقیاس تمام لگاریتمی:

این مقیاس زمانی به کار می رود که با معادلاتی نظیر $\log y = a\log x + \log b$ سروکار داشته باشیم که چنان چه بعداً خواهیم دید کافی است خود اعداد x و y را بدون لگاریتم‌گیری روی محورها برده و منحنی مربوطه را رسم کنیم. در کاغذ لگاریتمی هر دو محور افقی و عمودی دارای تقسیمات لگاریتمی هستند. یعنی فاصله‌ی نقطه‌ای که عدد ۲ روبرویش نوشته شده است، تا مبدأ مختصات، متناسب با log۲ می باشد و این امر در مورد تمام اعداد دیگر صادق است. لذا مبدأ مختصات با عدد ۱ نشان داده شده که طبق قرارداد بالا log۱=۰ است.



شکل ۹

۱. طول سیکل: مطابق شکل ۹، هر یک از محورهای افقی و عمودی دارای چند قسمت عمده هستند که هر یک از آن‌ها را سیکل می نامند. روی سیکل اول اعداد یک تا ده، روی سیکل دوم اعداد ۱۰ تا ۱۰۰ و روی سیکل سوم اعداد از ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ درج شده‌اند. از آن جا که فاصله‌ی هر عدد تا مبدأ مختصات متناسب با لگاریتم همان عدد است، می‌توان نوشت:

$$d_{10} = C\log 10 = C$$

C= ضریب تناسب بین طول نظیر اعداد با لگاریتم آن‌هاست.

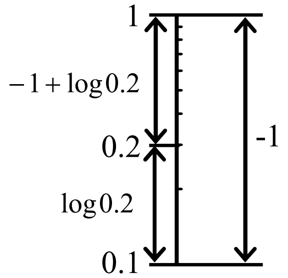
d_{10} را که فاصله‌ی عدد ۱۰ تا مبدأ مختصات است، طول یک سیکل می‌نامیم و با C نمایش می‌دهیم.

$$d_{100} = C\log 100 = 2C\log 10 = 2C$$

پس فاصله‌ی عدد صد تا مبدأ مختصات دو برابر طول سیکل اول است پس از همین جا در می‌یابیم که طول سیکل دوم برابر طول سیکل اول است. و با همین استدلال می‌توان نشان داد که طول سیکل سوم نیز مساوی طول سیکل اول است. پس اصولاً نتیجه می‌شود که محورها به قسمت‌های متساوی‌الطول ده‌دهی تقسیم شده‌اند که طول هر یک از آن‌ها را طول سیکل می‌نامیم. طول سیکل ممکن است در کاغذهای مختلف، متفاوت باشد.

۲. تغییر واحد در مقیاس لگاریتمی: با توجه به معادله‌ی $\log y = a\log x + \log b$، ممکن است که اعداد x و y اعدادی کسری یا اعشاری باشند که ظاهراً نظیرشان روی کاغذ میلی‌متری مستقیماً مشاهده نشود. مثلاً اگر {۰/۹ و ۰/۷ و ۰/۴ و ۰/۲}=y باشد، ممکن است این سؤال پیش آید که ما که اعداد اعشاری روی کاغذ نداریم چه باید بکنیم؟ راه حل این مسأله بدین ترتیب است که مبدأ مختصات را به جای ۱، ۰/۱ فرض کنیم و لذا عدد ۲ معادل ۰/۲ و عدد ۴ معادل ۰/۴ و ... خواهد شد. با این کار در حقیقت ظاهراً محور را ۱۰ برابر کوچک کرده‌اید ولی از آن جایی که:

$\log 0.1 = -1$ و $\log 0.2 = -1 + \log 2$ و $\log 0.4 = -1 + \log 4$



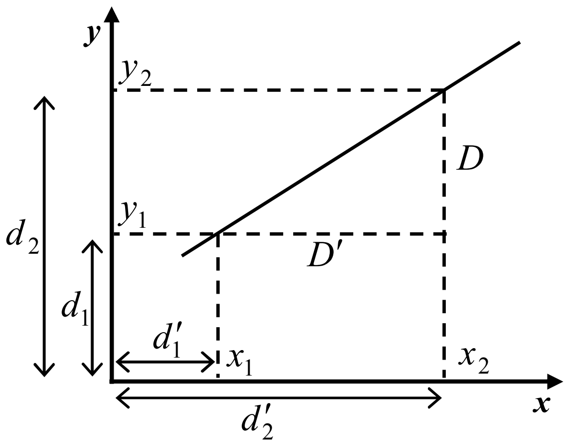
شکل ۱۰

و با مراجعه به شکل ۱۰، معلوم می‌شود که این کار درست معادل آن است که محور مختصات افقی را به اندازه‌ی یک سیکل به پایین انتقال دهیم. حال اگر منظور ما از تغییر واحد چیزی به غیر از تغییرات ده‌دهی یعنی ۱۰ برابر کوچک یا بزرگ کردن باشد، مثلاً اگر بخواهیم اعداد مورد نظرمان را دو برابر بزرگ کنیم، باید به جای اعداد جدول قبل اعداد {۱/۸ و ۱/۴ و ۰/۸ و ۰/۴ =y} را روی محورها بریم. یا به عبارت دیگر به جای $\log y$، $\log 2y$ را روی محور منظم کنیم. ولی می‌دانیم:

$$\log 2y = \log 2 + \log y$$

و این رابطه نشان می دهد که این کار چیزی نیست مگر انتقال محور افقی به اندازه طول $\log 2$ بنابراین در این جا به یک نتیجه‌ی کلی دست می‌یابیم و آن این است که هر گونه تغییر واحد در مقیاس لگاریتمی معادل است با انتقال محورهای مختصات و نه چیز دیگر و لذا بر خلاف آن چه که در مقیاس میلی‌متری دیدیم که با تغییر واحدها قادر بودیم تحدب و تقعر منحنی را ظاهراً تغییر داده و یا در صورت خطی بودن، شیب آن را چیزی متفاوت با $\tan\alpha$ ببینیم، در مقیاس لگاریتمی تغییر واحد، هیچ گونه تغییری در شکل ظاهری منحنی ایجاد نمی کند (یعنی آن را جمع و باز نمی‌کند و در صورت خطی بودن آن را افقی‌تر یا سراشیب‌تر نمی‌کند).

طریقه‌ی محاسبه‌ی شیب خط در مقیاس لگاریتمی: به همان روشی که در مقیاس میلی متری ذکر شد، مثلث قائم‌الزاویه‌ی دلخواهی متکی به خط می‌سازیم (شکل ۱۱) و نسبت طول ضلع قائم (که با خط کش باید اندازه بگیریم) به طول ضلع افقی (که آن هم با خط کش باید اندازه گیری شود) را تعیین می‌کنیم. این نسبت همان شیب یا ضریب زاویه‌ی خط می‌باشد.



شکل ۱۱

$$\begin{aligned} d_1 &= C\log y_1 \\ d_2 &= C\log y_2 \\ d'_1 &= C\log x_1 \\ d'_2 &= C\log x_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} D = d_2 - d_1 = C\log y_2 - C\log y_1 \\ D' = d'_2 - d'_1 = C\log x_2 - C\log x_1 \end{cases}$$

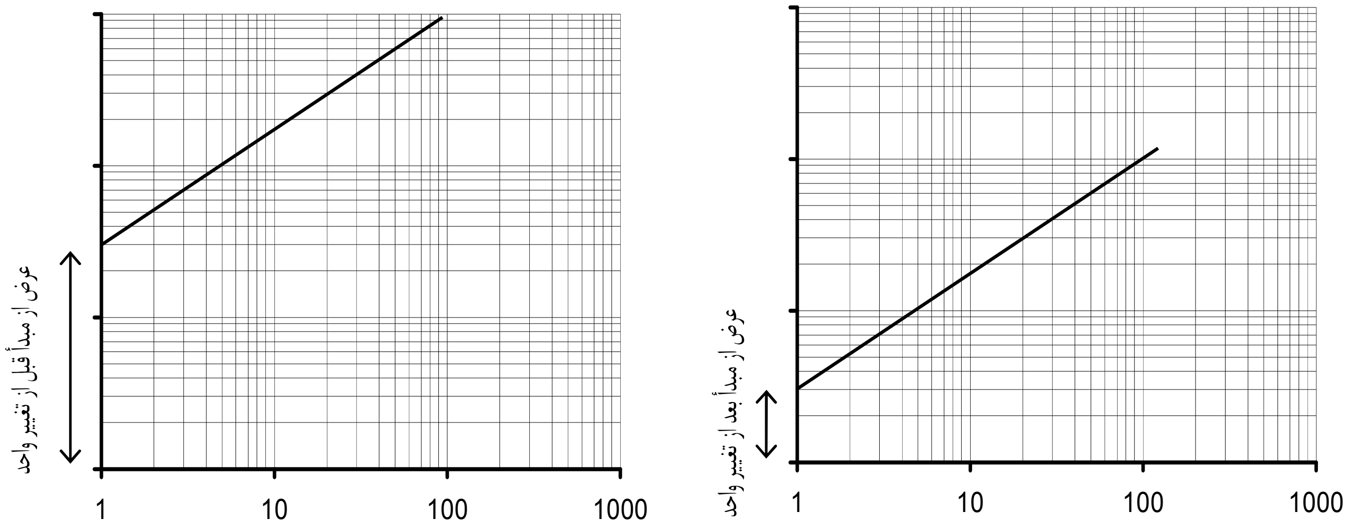
بنابراین:

$$\text{شیب خط} = \frac{\Delta(Log y)}{\Delta(Log x)} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{C\log y_2 - C\log y_1}{C\log x_2 - C\log x_1} = \frac{D}{D'}$$

طریقه‌ی محاسبه‌ی عرض از مبدأ و طول از مبدأ در مقیاس لگاریتمی: به فرض این که تغییر واحدی در مقیاسمان نداده باشیم (محورها را انتقال نداده باشیم) کافی است دریابیم که خط، محور را در چه عددی قطع می‌کند. مثلاً اگر خط مذکور محور y ها را در عدد ۲/۴ قطع کند، $\log b = \log ۲/۴$ و از آن جا b=۲/۴ خواهد بود. ولی چنان چه تغییر واحد (انتقال محور مثلاً عمودی داده باشیم)، خط مورد نظر، محور عمودی را در مقابل عددی اعشاری قطع می‌کند و عرض از مبدأ نیز عددی منفی خواهد بود. مثلاً اگر خط، محور x ها را در نقطه‌ی ۰/۳ قطع کند:

$$\log b = \log ۰/۳ = -۱ + \log ۳ < ۰$$

و عرض از مبدأ با علامت منفی همان مقداری خواهد بود که در شکل ۱۲ نمایش داده شده است.



شکل ۱۲

ج) کاغذ نیمه لگاریتمی:

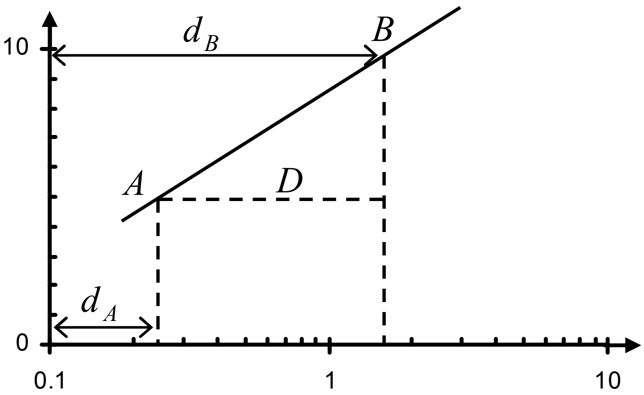
در این نوع کاغذ رسم، دو نوع مقیاس لگاریتمی و میلی متری روی دو محور درج شده است که قاعدتاً طول کل محور لگاریتمی بزرگ‌تر از محور میلی‌متری است. از این نوع کاغذ در مواردی استفاده می شود که با معادلاتی نظیر $y = a\log x + \log b$ سروکار داشته باشیم. چنان چه در این معادله مشاهده می‌شود یک طرف، اعداد معمولی و طرف دیگر با اعداد لگاریتمی مربوط می‌شود و به همین دلیل برای رسم نمایش تغییرات چنین تابعی ناگزیر به استفاده از یک کاغذ نیمه لگاریتمی هستیم. لذا در مورد محور لگاریتمی این کاغذ به همان ترتیبی که در مورد کاغذ تمام لگاریتمی عمل کردیم لازم است بدون لگاریتم‌گیری، خود اعداد را مستقیماً روی محور مربوطه ببریم. در مورد محور میلی‌متری نیز می‌توان مانند یک محور میلی‌متری معمولی رفتار کرد بدین معنا که اعداد y را با انتخاب واحدی مناسب روی محور مربوطه انتقال داد.

طریقه‌ی به دست آوردن شیب خط در کاغذ نیمه لگاریتمی: درست طبق همان روش قبلی مثلث قائم‌الزاویه‌ی دلخواهی متکی به خط می‌سازیم (شکل ۱۳). از معادله‌ی خط چنین بر مـی‌آیـد که:

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\log B - \log A} = \frac{\Delta y}{1/c(d_B - d_A)}$$

و از آن جا:

$$\alpha = \frac{\Delta y}{D/C}$$



شکل ۱۳

چنان چه مشاهده می شود برای محاسبه α لازم است که طول ضلع افقـی مثلـث قـائم‌الزاویـه (D) را با خط‌کش اندازه گرفته، سپس عدد حاصل را بر طول یک سیکل (C) کـه آن را هـم قـبلاً بـا خط‌کش اندازه گرفته‌ایم تقسیم کنیم.

در مورد اندازه‌گیری طول از مبدأ و عرض از مبـدأ بـه همـان طریـق کـه در بحـث کاغـذ تمـام لگاریتمی و میلی‌متری گفته شد باید عمل کرد.

یک نکته‌ی مهم: چنان چه لگاریتمی که در فرمول ظاهر شد در مبنـای غیراعشـاری (m) باشـد (مثلاً در مبنای عدد نپرین) در مورد کاغذ تمام لگـاریتمی، محاسـبات و انـدازه‌گیـری‌هـا هـیچ گونـه تغییری نمی‌کند. ولی برای کاغذ نیمه لگاریتمی در مورد محاسبه‌ی شیب، آن چه که در مخرج ظـاهر شده، مقدار $\log_m B - \log_m A$ می‌باشد. در روش اندازه‌گیری آن با خط‌کش، آن چـه کـه از تقسـیم طول ضلع افقی بر طول سیکل به دست می آید، مقدار عددی $(\log B - \log A)$ در پایه اعشار است و باید به لگاریتم پایه‌ی مورد نظر (مثلاً $\log_{10} e$) تقسیم شود پس:

$$\log_m B - \log_m A = \frac{D}{C \cdot \log_{10} m} \Rightarrow \alpha = \frac{\Delta y . \log_{10} m}{D/C}$$

که در آن m عبارت است از مبنای غیراعشاری